

模块二 微分学

第一章 函数的导数

1.1 导数的概念

1.1.1 引例

1) . 求曲线的切线斜率

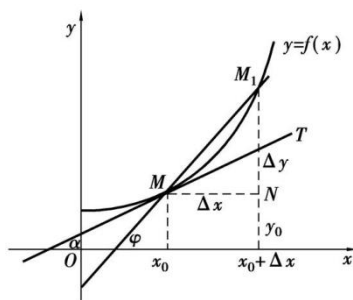


图 1

求曲线 $y = f(x)$ 上给定点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率. 如图 1 所示

首先, 当自变量在 x_0 有增量 $\Delta x (\Delta x \neq 0)$ 时, 相应的函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 对应曲线上另外一点 $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, 在直角三角形 MM_1N 中割线 MM_1 的斜率为

$$K_{MM_1} = \tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

其次, 从图上分析观察当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 割线 MM_1 的极限位置即为 M 点的切线 MT , 在此过程中割线 MM_1 的斜率 K_{MM_1} 的极限就应为切线 MT 的斜率 K , 即

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2) . 变速直线运动的瞬时速度

设一质点作变速直线运动, 其所经过的路程 s 是时间 t 的函数, 即 $s = s(t)$. 求质点在 $t = t_0$ 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$.

首先, 我们考察该质点在 $t = t_0$ 附近的运动状态. 当时间由 t_0 改变到 $t_0 + \Delta t$ 时($\Delta t \neq 0$), 质点在 Δt 这段时间内所经过的路程为 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, 于是质点在时间段 Δt 内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

其次, 由于质点作变速运动, 平均速度 \bar{v} 不足以刻画出质点在 $t = t_0$ 时刻的速度。显然 Δt 越小, 平均速度 \bar{v} 就越接近 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ 。所以当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 如果 \bar{v} 的极限存在, 则此极限就理应是质点在 t_0 时刻的瞬时速度, 即

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

1.1.2 导数的定义

上述两个引例虽然解决的是两个不同领域的问题, 各自表示不同的实际含义, 但解决思路是一致的, 无论是求切线斜率还是求瞬时速度, 都可归结为: 首先求出函数增量与自变量增量的比值; 其次求出比值的极限。抓住它们在数量关系上的这个共性, 就得出函数的导数概念。

1). 函数在一点 x_0 处的导数

定义 1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及其邻域内有定义, 当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx 时, 函数 $f(x)$ 的相应增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 如果两增量的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点可导或导数存在, 并将此极限值定义为 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 (微商), 记为 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记为 $y'|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ 。

如果上述极限不存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不可导。

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 反映的是自变量 x 从点 x_0 改变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 函数 $f(x)$ 的相对变化称为函数的平均变化率; 而导数 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 反映的是函数在点 x_0 处的瞬时变化称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的瞬时变化率。

下面我们再分析导数定义的另一种常用表达形式：因 $\Delta x = x - x_0$ ，且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，必有 $x \rightarrow x_0$ ，且

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

所以上述导数的定义也可以有如下的表现形式

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

根据导数的定义，前面两个引例就可以这样叙述：

(1) 曲线 $y = f(x)$ 在给定点 $M(x_0, y_0)$ 的切线斜率，就是函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数，即

$$k = f'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

(2) 质点在 $t = t_0$ 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ 就是路程 $s(t)$ 在 t_0 时刻的导数，即

$$v(t_0) = s'(t_0) = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0}$$

导数的定义不仅说明了导数概念的实质，同时也给出了具体求导数的方法。一般可概括为以下几个步骤：

(1) 求出相应于自变量增量 Δx 的函数增量 Δy 。

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

(2) 求出比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 。

(3) 求极限 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。

例 1 用定义求函数 $y = x^2$ 在 $x = -1$ 处的导数。

解 设自变量在 $x = -1$ 处有增量 Δx ，则函数增量为

$$\Delta y = f(-1 + \Delta x) - f(-1) = (-1 + \Delta x)^2 - (-1)^2 = -2\Delta x + (\Delta x)^2$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = -2 + \Delta x$$

所求导数为

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2 + \Delta x) = -2$$

例 2 证明函数 $y = |x|$ 在点 $x_0 = 0$ 处不可导。

证明 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时极限不存在, 所以函数 $y = |x|$ 在点 $x_0 = 0$ 处不可导.

2) 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点的单侧导数

x_0 点的单侧导数包括左导数和右导数, 在导数定义中, 只需将极限替换为单侧极限, 则可得单侧导数的定义.

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及其左侧邻域内有定义, 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则此极限值为函数在点 x_0 处的左导数, 记为 $f'_-(x_0)$. 即

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

类似地, 我们可定义右导数

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

定理 1 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左、右导数都存在并且相等即

$$f'(x_0) \text{ 存在的} \Leftrightarrow f'_-(x_0)、f'_+(x_0) \text{ 都存在且 } f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

此定理主要用于讨论函数在某点的导数是否存在, 特别是分段函数在分段点的导数存在与否的讨论.

例 3 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$, 讨论函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左、右导数与导数.

解 左导数为: $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$

右导数为: $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0$

因为 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

3) . 函数在区间内的导函数

定义 3 如果函数 $y = f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的每一点处都可导, 则称函数 $y = f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导; 若在区间端点还满足, 左端点 a 处 $f'_+(a)$ 存在, 右端点 b 处 $f'_-(b)$ 存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导.

此时, 对区间上的任一点 x , 都有一个导数值与之对应, 这样在该区间上定义了一个新的函数, 这个新的函数就称为 $y = f(x)$ 的导函数, 记为

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}.$$

导函数的计算公式为

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

显然, 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 即

$$f'(x_0) = f'(x) \Big|_{x=x_0}$$

在不引起混淆的情况下, 习惯上把导函数简称为导数.